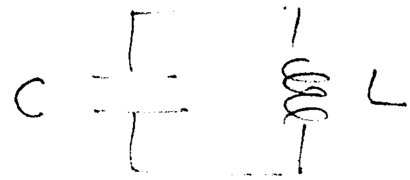
(c) Circuito LC



$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \qquad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad ; \text{ chamando } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 \qquad q = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

As constantes A e φ são determinadas pelas condições iniciais Ex: em $t=0$ $q = q_0$ $i = 0$

$$i = \frac{dq}{dt} = -A\omega\sin(\omega_0 t + \varphi) \qquad \underbrace{i(0)}_{=0} = -A\omega\sin\varphi \Rightarrow \varphi = 0$$

$$q = A\cos(\omega_0 t) \qquad q(0) = q_0 \Rightarrow A = q_0.$$

Nesse caso $q(t) = q_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Carga, corrente, d.d.p nos terminais do capacitor e a f.e.m. induzida t.b. oscilam com período $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ou frequência $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

Sem resistência a energia total é constante.

$$\frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} = \text{Energia total inicial} = \frac{q_0^2}{2C}.$$

(a) $L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0 \qquad i = \frac{dq}{dt}$

$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$

chamando $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ e $\lambda = \frac{R}{L} \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \lambda\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0}$$

* Análogo mecânico

$m\frac{d^2x}{dt} + \lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$

termo responsável pelo amortecimento

Soluções do tipo: $e^{zt} \Rightarrow$ Eq. característica.

$(z^2 + \lambda z + \omega_0^2)e^{zt} = 0 \Rightarrow z^2 + \lambda z + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow z = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\omega_0^2}}{2}$

$z = -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$ chamando $\frac{\lambda}{2} \equiv \omega_1$ (*) Obs: $\omega > 0$

$z = -\omega \pm \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2} = -\omega \pm \omega\left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2\right]^{1/2} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -\omega_1 + \omega_1\left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2\right]^{1/2} \\ z_2 = -\omega_1 - \omega_1\left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2\right]^{1/2} \end{cases}$

Solução geral: $q(t) = A_1 e^{z_1 t} + A_2 e^{z_2 t}$

A_1 e A_2 são duas constantes que são determinadas pelas condições iniciais do problema. Por exemplo $q(t=0) = q_0$ e $i(t=0) = i_0$.

(*) Há três regimes distintos, dependendo do valor do discriminante $1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2$.

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$\omega_1 = \frac{\lambda}{2} = \frac{R}{2L}$

Amortecimento forte $\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2 < 1 \Leftrightarrow \omega > \omega_0$

Amortecimento fraco $\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2 > 1 \Leftrightarrow \omega < \omega_0$

Amortecimento crítico $\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$

$$q(t) = \left\{ A_1 e^{\sqrt{\omega_1^2-\omega_0^2}\,t} + A_2 e^{-\sqrt{\omega_1^2-\omega_0^2}\,t} \right\} e^{-\omega_1 t}$$

$\omega = \frac{R}{2L} > 0$; $e^{-\omega_1 t}$ representa uma exponencial decrescente com o tempo, refletindo o amortecimento provocado pela dissipação no resistor.

a.1 - Amortecimento forte : $\omega_1^2 > \omega_0^2$. Nesse caso

$e^{-\omega_1 t \pm (\omega_1^2-\omega_0^2)^{1/2} t}$ são exponenciais decrescentes com o tempo.

$(\omega_1^2-\omega_0^2)^{1/2} = \omega_1 (1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2})^{1/2}$; $(1-\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2})^{1/2} < 1 \Rightarrow$

$$e^{-\omega_1 t \pm (\omega_1^2-\omega_0^2)^{1/2} t} = e^{-\omega_1 t\left[1 \mp \underbrace{(1-\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2})^{1/2}}\right]}$$

isto é sempre < 1 ⇒ A exp. é sempre decrescente.

Tanto $A_1 e^{-\omega_1 t} e^{\sqrt{\omega_1^2-\omega_0^2}\,t}$ quanto $A_2 e^{-\omega_1 t} e^{-\sqrt{\omega_1^2-\omega_0^2}\,t}$ caem com o tempo.

No caso do amortecimento relativamente fraco $\omega_1^2 < \omega_0^2$

Nesse caso $\sqrt{\omega_1^2-\omega_0^2} = \sqrt{(-1)\underbrace{(\omega_0^2-\omega_1^2)}_{>0}} = i\sqrt{\underbrace{\omega_0^2-\omega_1^2}_{>0}}$

$z_1 = -\omega_1 + i\alpha$; $z_2 = -\omega_1 - i\alpha$

com $\alpha = \sqrt{\omega_0^2-\omega_1^2}$ real e > 0 .

$q_1(t) = e^{r_1 t} = e^{-\omega_1 t} e^{i\alpha t} = e^{-\omega_1 t}(\cos\alpha t + i\sin\alpha t)$ é solução

$q_2(t) = e^{r_2 t} = e^{-\omega_1 t} e^{-i\alpha t} = e^{-\omega_1 t}(\cos\alpha t - i\sin\alpha t)$ t.b. é solução

$q_1 + q_2 = e^{-\omega_1 t}\, 2\cos\alpha t$ e $q_1 - q_2 = e^{-\omega_1 t}\, 2i\sin\alpha t$

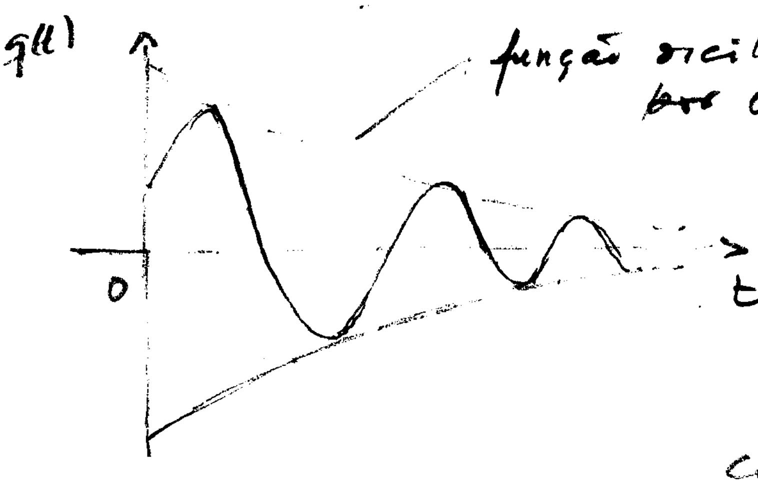
também são soluções. Na verdade,

$$A_1 e^{-\omega_1 t}\cos\alpha t + A_2 e^{-\omega_1 t}\sin\alpha t \quad \text{é sol. } \forall\, A_1 \text{ e } A_2$$

Em outras palavras a sol. geral

$$q(t) = e^{-\omega_1 t}(A_1\cos\alpha t + A_2\sin\alpha t) = e^{-\omega_1 t} A\cos(\alpha t + \varphi)$$

$\omega_1 = \dfrac{R}{2L}$; $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$; $\alpha = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}$



função oscilatória modulada por uma exponencial decrescente $e^{-\omega_1 t}$ onde $\omega_1 = \dfrac{R}{2L}$

Quanto maior R mais rápido é o decaimento como esperado.

A_1 e A_2 ou A e φ são duas constantes que devem ser determinadas pelas condições de contorno do problema.

Caso (a) <u>com bateria</u> $\mathcal{E} = \underline{ct}$.

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = \mathcal{E} \qquad i = \frac{dq}{dt}$$

Para $\mathcal{E}$ independente de t (fonte de tensão $\underline{ct}$) podemos derivar a eq. acima em relação ao tempo e obter

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \iff \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

$$\lambda \equiv R/L \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \lambda\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0}$$

Mesma eq. para a carga $q(t)$ no caso (a) sem bateria.

Finalmente, no caso do amortecimento crítico

$\omega_1 = \omega_0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -\omega_1$

Neste caso $q_1(t) = A e^{-\omega_1 t}$ é solução. Porém,

$q_2 = t e^{-\omega t}$ t.b. é solução. Vejamos:

$$\frac{dq_2}{dt} = (-\omega_1) t e^{-\omega_1 t} + e^{-\omega_1 t} \qquad \frac{d^2q_2}{dt^2} = \omega_1^2 t e^{-\omega_1 t} + (-\omega_1) e^{-\omega_1 t} + (-\omega_1) e^{-\omega_1 t}$$

$$\frac{d^2q_2}{dt^2} + \lambda\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \omega_1^2 t e^{-\omega t} - 2\omega_1 e^{-\omega t} + \lambda(-\omega_1) t e^{-\omega t} + \lambda e^{-\omega t} + \omega_0^2 t e^{-\omega t} = (\omega_1^2 - \lambda\omega_1 + \omega_0^2) t e^{-\omega_1 t} + (-2\omega_1 + \lambda) e^{-\omega_1 t} = 0$$

De facto, $\begin{cases} \omega_1^2 - \lambda\omega_1 + \omega_0^2 = \dfrac{\lambda^2}{4} - \lambda\dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\lambda^2}{4} = 0 \\ -2\omega_1 + \lambda = -2\dfrac{\lambda}{2} + \lambda = 0 \end{cases}$

Ou seja, a solução geral é da forma

$$\boxed{q(t) = A_1 e^{-\omega_1 t} + A_2 t e^{-\omega_1 t}} \quad \omega_1 = \omega_0$$

amortecimento crítico.

Resumo: Duas raízes reais distintas $\omega_1 > \omega_0$

Amortecimento forte $\quad q(t) = e^{-\omega_1 t}\left[A_1 e^{\alpha' t} + A_2 e^{-\alpha' t}\right]$

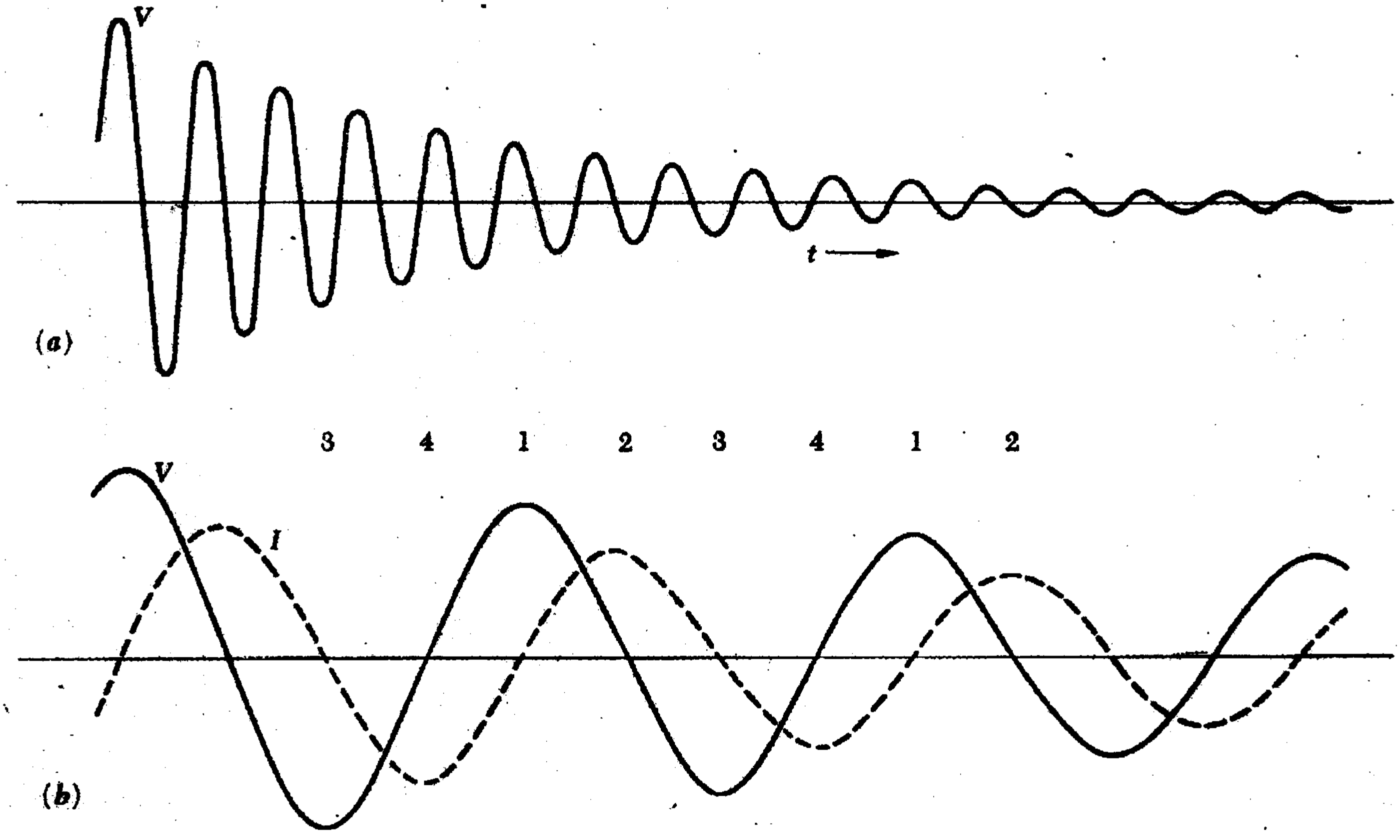
$$\omega_1 = \lambda/2 \;;\; \alpha' = \sqrt{\omega_1^2 - \omega_0^2} \;;\; \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$
$$\lambda = R/L$$

Amortecimento fraco: duas raízes complexas $\omega_1 < \omega_0$

$$q(t) = e^{-\omega_1 t}\left[A_1 \cos\alpha t + A_2 \sin\alpha t\right]$$
$$= e^{-\omega_1 t} A \cos(\alpha t + \varphi)$$
$$\alpha = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2} \quad \omega_1 = \lambda/2 \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

Amortecimento crítico: uma raiz apenas $\omega_1 = \omega_0$

$$q(t) = e^{-\omega_1 t}\left[A_1 + A_2 t\right]$$



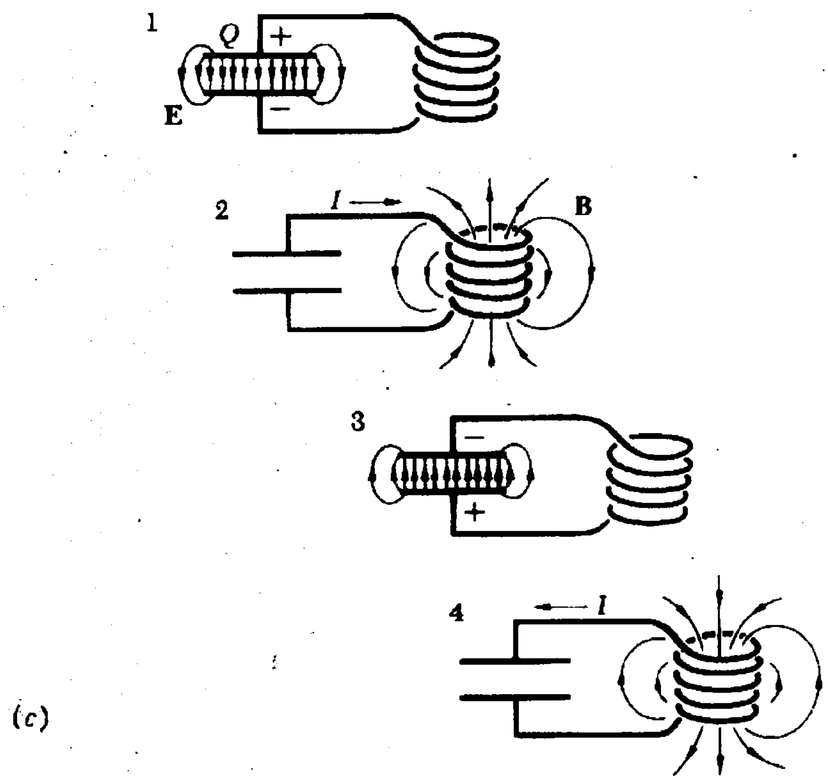
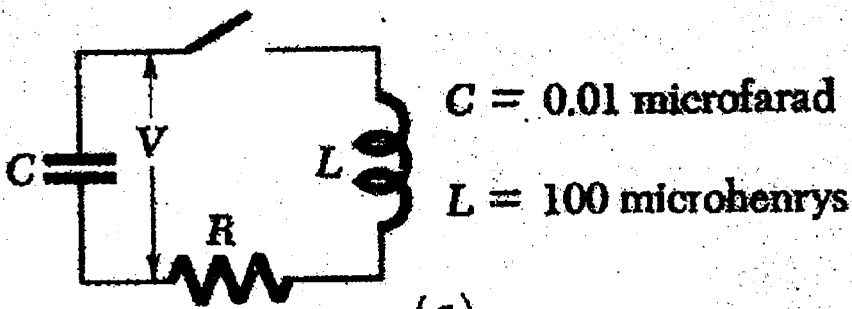


Fig. 8.2 (*a*) A oscilação senoidal amortecida da tensão no circuito *RLC*.

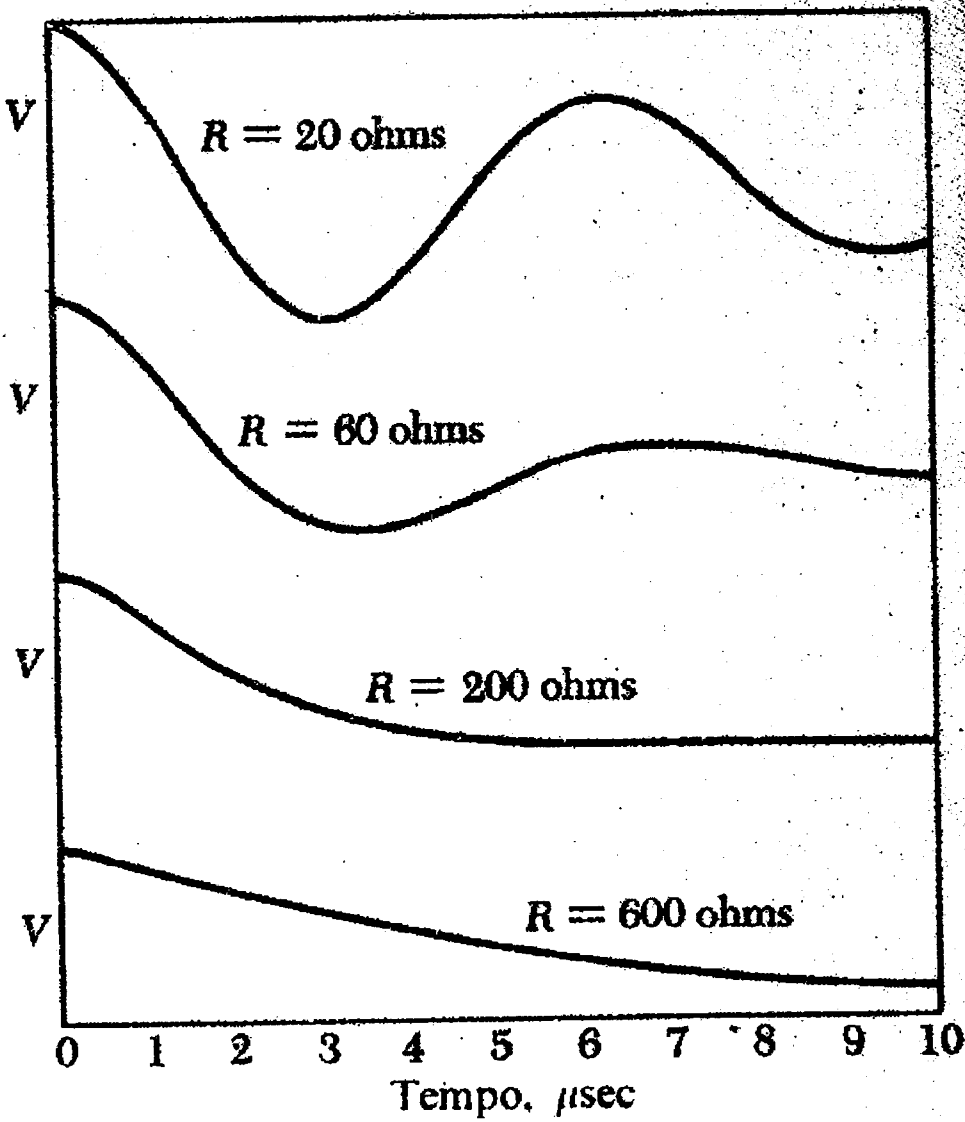
(*b*) Uma porção de (*a*) com a escala do tempo ampliada e com a inclusão do gráfico da corrente *I*.

(*c*) A transferência periódica de energia do campo elétrico para o campo magnético e vice-versa. Cada desenho representa a situação no instante indicado pelo número correspondente em (*b*).

29''


C
V
L
R
C = 0.01 microfarad
L = 100 microhenrys

(a)


V
R = 20 ohms
V
R = 60 ohms
V
R = 200 ohms
V
R = 600 ohms
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Tempo, μsec

(b)